

## Méthodes numériques pour des fluides viscoplastiques : le cas de la rhéologie de Bingham

Thierry Dubois

Bâtiment de Mathématiques, Bureau 127

Tél. : 04 73 40 77 06 - Mél. : Thierry.Dubois@uca.fr

Un fluide de Bingham modélise un milieu viscoplastique comme le miel, le dentifrice, la mayonnaise, certaines boues ou encore un mélange dense d'air ou d'eau avec des particules fines. De tels fluides sont très utilisés dans un contexte industriel (alimentaire, bâtiment, ...) et on les rencontre également dans des problèmes géophysiques (couées de boues, écoulements pyroclastiques générés par des éruptions volcaniques, ...). Les écoulements d'un fluide de Bingham sont régis par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (mécanique des fluides). Le tenseur des contraintes, défini en fonction du tenseur des déformations (*i.e.* la partie symétrique du gradient du champs de vitesse) vérifie une loi à seuil. Une conséquence importante du point de vue mathématique est qu'une telle rhéologie n'est pas toujours définie et donne lieu à une expression non différentiable pour la partie plastique du tenseur. Il convient alors d'introduire des outils adaptés et de développer des méthodes permettant de résoudre cette difficulté majeure.

L'approche mathématique classique pour ce modèle repose sur une formulation variationnelle et l'écriture d'un problème de point-selle portant sur un Lagrangien augmenté. Un algorithme de Lagrangien augmenté a été proposé par Fortin et Glowinsky dans [1] pour résoudre numériquement ce problème d'optimisation.

Dans [2], une méthode originale a été proposée et analysée pour des écoulements viscoplastiques incompressibles homogènes, *i.e.* à densité constante. Elle repose sur une formulation à l'aide d'un opérateur de projection de la définition du tenseur plastique. Cette approche est couplée avec un schéma de projection [3] pour la discrétisation en temps des équations, ce qui permet de découpler les inconnues vitesses et pression, et d'imposer la contrainte d'incompressibilité. Le schéma de bi-projection ainsi obtenu est un algorithme efficace et simple à mettre en œuvre pour l'approximation numérique d'écoulements viscoplastiques.

L'objectif de ce cours sera, après une introduction à la modélisation des écoulements visco-plastiques, d'étudier ces différents schémas, du point de vue de leur analyse mathématique (stabilité et estimation d'erreurs) et de leur mise en œuvre.

### Références bibliographiques

- [1] M. Fortin et R. Glowinsky, *Augmented Lagrangian methods*, Elsevier, 1983.
- [2] L. Chupin et T. Dubois, *A bi-projection method for Bingham type flows*, *Comput. Math. Appl.*, **72**(5) :1263–1286, 2016.
- [3] J.L. Guermond, P. Mineev et J. Shen, *An Overview of Projection Methods for Incompressible Flows*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **195** :6011-6045, 2006