

Proposition cours M2

Cristina Anghel et Michael Heusener

Cours introductif à la recherche 1 : S3

Introduction à la topologie algébrique et géométrie

Michael Heusener, michael.heusener@uca.fr

Il s'agit d'un cours introductif à la topologie algébrique. Le cours débutera avec des compléments en topologie et théorie de groupes (produit libre, groupes libres et présentations de groupes). Le but du cours est d'introduire au groupe fondamental, des revêtements et la théorie d'homologie.

Références

- Michèle Audin, *Topologie : revêtements et groupe fondamental*, notes de cours.
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/courstopalg.pdf>
- Oleg Bogopolski. *Introduction to group theory*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. x+177 pp. <https://doi-org.ezproxy.uca.fr/10.4171/041>
- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2011).
<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>

Cours introductif à la recherche 2 : S4

La topologie des invariants d'entrelacs via les espaces de configurations

Cristina Anghel, cristina.anghel@uca.fr

Le cours du S3 *Introduction à la topologie algébrique et géométrie* est un prérequis pour ce cours.

Motivation La théorie des nœuds et des entrelacs étudie les plongements du cercle dans l'espace tridimensionnel. Le premier invariant pour des entrelacs, découvert en 1923, était le polynôme d'Alexander. Après, le monde des invariants quantiques a commencé avec le polynôme de Jones et a été développé par Witten, Reshetikhin et Turaev. Ils ont construit des généralisations quantiques du polynôme de Jones en utilisant la théorie des représentations. Les définitions connues de ces deux invariants principaux, le polynôme d'Alexander et le polynôme de Jones, sont de natures différentes, posant un problème fondamental. Le polynôme d'Alexander est bien compris en termes du complément du nœud. Cependant, la connexion entre le polynôme de Jones et la topologie du complément du nœud est une question mystérieuse.

Plan du cours L'objectif de ce cours est de comprendre ces invariants issus de contextes différents d'un point de vue topologique, via des modèles topologiques. Nous appelons « modèle topologique » une intersection graduée dans un certain espace de configurations. Les outils principaux que nous utiliserons sont les représentations homologiques des groupes de tresses. Le cours est partagé en deux parties.

1. Dans la première partie nous présenterons les ingrédients principaux nécessaires pour la définition des invariants d'entrelacs. Nous commencerons par l'étude des tresses et des groupes de tresses. Ensuite, nous discuterons des espaces de configurations et des mapping class groups du disque perforé ([6, Chapitre 1, Chapitre 2]).
2. La deuxième partie du cours sera consacrée aux représentations homologiques des groupes de tresses. Le premier objectif du cours est la compréhension du polynôme d'Alexander via la représentation de Burau des groupes de tresses ([6, Chapitre 3]).

Si le temps le permet, nous discuterons des modèles topologiques pour invariants quantiques ([4], [1], [2]). Nous étudierons un *modèle topologique qui unifie les polynômes de Jones et d'Alexander* ([1]). Il donne une nouvelle perspective, qui permet de lire les deux invariants à partir du même image topologique : une intersection graduée entre sous-variétés dans un espace de configurations.

Références

- [1] C. Anghel. *Coloured Jones and Alexander polynomials as topological intersections of cycles in configuration spaces*, 71 pages, Advances in Mathematics 459, 109993, (2024), <https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109993>.
- [2] C. Anghel. *A globalisation of Jones and Alexander polynomials constructed from a graded intersection of two Lagrangians in a configuration space*, 32 pages, Annales de l'Institut Fourier, à paraître, arXiv:2205.07842.
- [3] C. Anghel. *Quantum Knot Invariants Via the Topology of Configuration Spaces*, London Mathematical Society Newsletter, Featured Article, January 2023, https://www.lms.ac.uk/sites/default/files/inline-files/NLMS_504_for%20web.pdf.
- [4] S. Bigelow. *A homological definition of the Jones polynomial*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), Geom. Topol. Monogr. 4, 29-41, (2002).
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2011).
- [6] C. Kassel, V. Turaev. *Braid groups*, Springer, (2008).
- [7] V. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. de Gruyter Studies in Mathematics, (1994).